QUAND L'ECONOMIE PRECEDAIT (peut-être) LA PHYSIQUE

L'histoire et l'épistémologie des sciences et de l'économie montrent combien la physique a profondément structuré la pensée économique. Dès le milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), William S. Jevons (1835-1882) ou encore Léon Walras (1834-1910) ont ouvert la voie aux apports de la physique dans certains développements de l'analyse économique : étude des cycles économiques, de l'équilibre général, économie monétaire et financière. Au-delà de ces branches spécifiques, la modélisation économique et l'économétrie du XX$^{\text{ème}}$ siècle ont aussi largement puisé dans les outils des physiciens, de façon plus ou moins fondée. Emprunts délibérés ou non, du seul usage d'un formalisme mathématique naît de toute façon une forte influence : physique et mathématiques, ce sont des siècles de développements conjoints en grande partie indissociables.

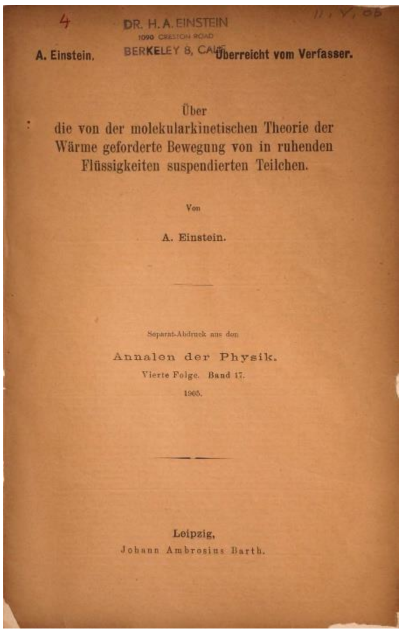
Beaucoup plus rare, l'influence de l'économie sur la physique n'est pourtant pas totalement inexistante. Les modèles et concepts économiques ont parfois enrichi quelques domaines de la physique. Loi de Pareto, modèles GARCH, *Minority Games* en sont des exemples, de même que certaines interactions issues de l'émergence de l'éconophysique au cours des dernières décennies [1].

Sans même parler d'apport, la simple antériorité de modèles économiques relève malgré tout de l'exception. C'est la motivation à rapporter ici des investigations inédites mettant en lumière la contribution en économie de travaux un peu oubliés du physicien Yves Rocard[1] (1903-1992). Elles montrent notamment que dès les années 1940 et avec un modèle économétrique, ce dernier avait franchi un premier pas vers ce qu'on n'appelait pas encore la théorie du chaos.

Ce n'est pas sans évoquer la redécouverte de la thèse de Louis Bachelier (1870-1946) et la genèse du mouvement brownien, sujet abondamment documenté et commenté [2-6], dont on rappelle simplement les grandes lignes dans ce qui suit. Le rapprochement vient à l'esprit avec dans les deux cas une contribution à la connaissance et la représentation de systèmes dynamiques, ainsi que des objectifs au départ assez proches : rendre compte de phénomènes d'apparence désordonnée et erratique. Les deux démarches s'inscriront en revanche dans des cadres mathématiques de nature assez différente, déterministe pour l'un et probabiliste pour l'autre.

Einstein et le mouvement brownien

1905 : élue *annus mirabilis* pour Albert Einstein (1879-1955), qui publie cette année-là dans *Annalen der Physik* quatre articles à l'origine de bien des bouleversements en physique. En germe, les bases de la Relativité et de la physique quantique et une relation d'équivalence entre masse et énergie qui deviendra l'une des équations les plus connues au monde. Un des articles met en évidence l'effet photoélectrique ainsi que l'existence des atomes ; pendant des décennies il fera du physicien le père du modèle de mouvement brownien, formalisation de l'idée de marche au hasard en temps continu. Rappelons que le terme est forgé d'après le nom du botaniste écossais Robert Brown (1773-1858) et de ses observations à la fin des années 1820 sur le mouvement de grains de pollen à la surface d'un liquide.


4
DR. H. A. EINSTEIN
1090 CRESTON ROAD
BERKELEY 8, CALIF.
11, V, 05

A. Einstein. Überreicht vom Verfasser.

Über
die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.

Von

A. Einstein.

Separat-Abdruck aus den

Annalen der Physik.

Vierte Folge. Band 17.

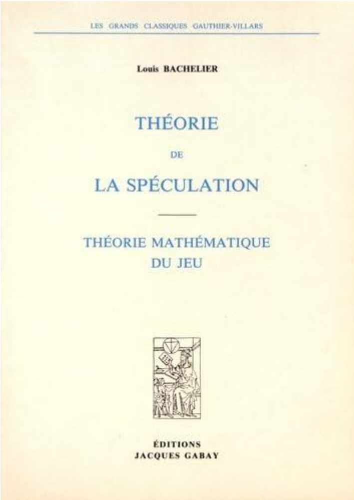
1905.

Leipzig,
Johann Ambrosius Barth.

Une thèse exotique en son temps

C'est dans les années 1950 que l'économiste américain Paul Samuelson (1915-2009) sort de l'oubli la thèse de doctorat de Louis Bachelier, réalisée sous la direction de l'éminent Henri

[1] Père de l'ancien Premier ministre Michel Rocard et grand-père de l'astrophysicien Francis Rocard.



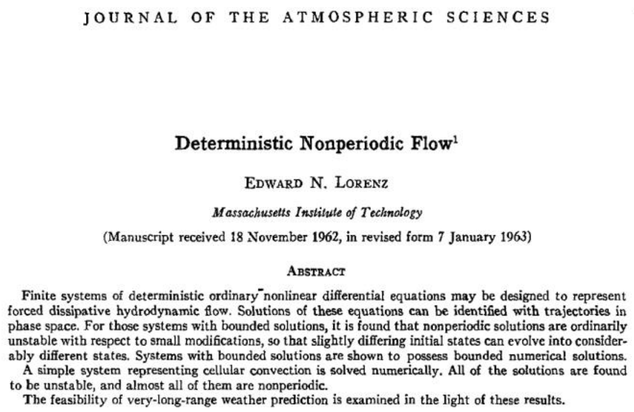
Poincaré (1854-1912). Dans celle-ci, intitulée « Théorie de la Spéculation » et soutenue à la Sorbonne en mars 1900, figure pour la première fois une formulation mathématique du mouvement brownien, cinq ans avant l'article d'Einstein. Pour diverses raisons qui se sont malencontreusement conjuguées, Bachelier n'a pas eu de son vivant la reconnaissance qu'il pouvait espérer.

Diffusion du processus

En dehors de l'exception due à Bachelier, l'introduction des processus stochastiques provient essentiellement de la physique de la période d'avant-guerres. A la suite de diverses prémices de modélisation de ces processus, les tournants décisifs sont l'œuvre de Norbert Wiener (1894-1964) dans les années 1920, d'Andreï Kolmogorov (1903-1987), puis de Paul Lévy (1886-1971), avec l'axiomatique de la théorie des probabilités. Après les fondements mathématiquement rigoureux du mouvement brownien et des processus stochastiques viendront le calcul différentiel stochastique, Kiyoshi Itō (1915-2008) et son fameux lemme, puis l'essor que l'on sait des marchés dérivés et des mathématiques financières [7]. Et de nouveaux champs d'application continuent d'apparaître : dans une actualité toute récente et encore en ébullition, tout un pan de l'IA générative nourrit ses algorithmes (*score diffusion*) de ces outils et concepts communs à la physique statistique et à la finance de marché [8].

Pour rester au royaume des pionniers et des destins contrariés, évoquons aussi en passant le triste sort du mathématicien Wolfgang Döblin (1915-1940). Ses derniers travaux, rédigés sur le front avant son suicide en 1940 et adressés en pli cacheté à l'Académie des sciences, n'ont été révélés qu'en 2000. Consacrés à la résolution de l'équation de (Chapman-)Kolmogorov, ils préfiguraient le calcul d'Itō [9].

Le papillon de Lorenz



JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES

Deterministic Nonperiodic Flow[1]

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

ABSTRACT

Finite systems of deterministic ordinary nonlinear differential equations may be designed to represent forced dissipative hydrodynamic flow. Solutions of these equations can be identified with trajectories in phase space. For those systems with bounded solutions, it is found that nonperiodic solutions are ordinarily unstable with respect to small modifications, so that slightly differing initial states can evolve into considerably different states. Systems with bounded solutions are shown to possess bounded numerical solutions.

A simple system representing cellular convection is solved numerically. All of the solutions are found to be unstable, and almost all of them are nonperiodic.

The feasibility of very-long-range weather prediction is examined in the light of these results.

Dans un article[2] publié en mars 1963, le physicien américain Edward N. Lorenz (1917-2008) exposait le résultat de travaux visant à évaluer la fiabilité des prévisions météorologiques. En étudiant un modèle simplifié de convection atmosphérique, il y exhibe en particulier un système dynamique non linéaire de dimension 3 (soit trois équations différentielles ordinaires) qui, en dépit de sa simplicité, peut produire des trajectoires apériodiques, instables et d'évolution extrêmement sensible aux conditions initiales. Le terme chaotique est rapidement adopté pour qualifier ce type de comportement et au milieu des années 1970 l'expression « théorie du chaos » s'impose pour désigner l'étude de tels systèmes dynamiques déterministes. Dans le sillage d'une conférence[3] donnée en 1972 par Lorenz devant l'*American Association for the Advancement of Science* émerge la métaphore de « l'effet papillon ». Théorie du chaos, effet papillon, chaos déterministe, autant d'expressions popularisées bien au-delà des cercles scientifiques et souvent employées à tort et à travers[4].

---

[2] Edward N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, n°2, mars 1963.

[3] *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?* Certains invoquent plutôt la forme des trajectoires.

[4] Un peu comme la « théorie des catastrophes » de René Thom (1923-2002) sur un autre sujet, mais toujours dans le registre apocalyptique.

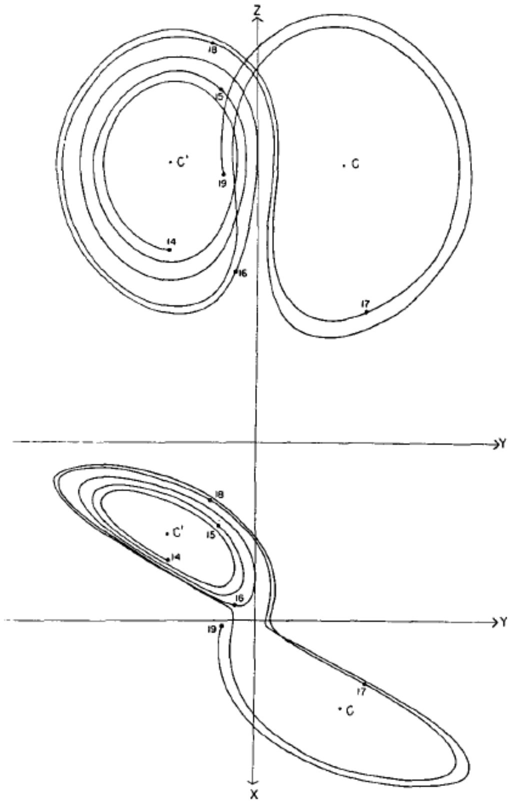


FIG. 2. Numerical solution of the convection equations. Projections on the X-Y-plane and the Y-Z-plane in phase space of the segment of the trajectory extending from iteration 1400 to iteration 1900. Numerals "14," "15," etc., denote positions at iterations 1400, 1500, etc. States of steady convection are denoted by C and C'.

$$\begin{aligned} X^{\cdot} &= -\sigma X+\sigma Y, \\ Y^{\cdot} &= -XZ+rX-Y, \\ Z^{\cdot} &= XY - bZ \end{aligned}$$

Une contribution à redécouvrir

Yves Rocard par Yves Rocard (Archives CEA)

Des travaux récents d'une équipe pluridisciplinaire de physiciens, mathématiciens et économistes viennent sensiblement bousculer l'historiographie établie sur le rôle pionnier de Lorenz [10-11]. Ils résultent de façon un peu incidente de recherches historiques menées sur la théorie des oscillations non linéaires [12]. Dans le livre *Théorie des Oscillateurs*, publié en 1941 par le physicien Yves Rocard, un chapitre intitulé « Les oscillateurs des théories économiques » suscite la curiosité, l'auteur n'étant pas particulièrement connu pour ses travaux en économie. Des investigations approfondies et un accès privilégié à des archives inexplorées de l'ENS et du CEA ont mis au jour des faits jusqu'ici inédits ou un peu oubliés.

Au début de la Seconde Guerre mondiale, le parcours du physicien est déjà riche d'activités diversifiées, à la fois dans le monde académique et dans l'industrie. Son intérêt pour les questions économiques s'est manifesté dès les années 1930 avec la fréquentation des premiers économètres français. Il s'est également porté sur l'observation des écarts dans le temps entre les anticipations de différentes variables économiques et leurs réalisations. L'analyse des modèles économiques serviront à Yves Rocard de support pour promouvoir certaines de ses idées en matière de politiques scientifiques et jouer dans la France de l'après-guerre un rôle essentiel dans la restructuration et le développement de la recherche. Ses contributions dans le domaine économique sont également novatrices à plus d'un titre [13] :

Le début des années 1930 voit apparaître dans la revue *Econometrica* quelques articles suggérant une représentation des cycles économiques par analogie avec différents types d'oscillations rencontrées dans des systèmes mécaniques ou électriques. Jusqu'à présent, aucune véritable formulation mathématique ne semblait avoir émergé avant l'article séminal publié en 1951 par l'économiste américain Richard Goodwin (1913-1996). Il s'avère aujourd'hui que les travaux de Rocard le devançaient de plus de dix ans [14].

Le chapitre de l'ouvrage de 1941 évoqué plus haut vise à expliciter une représentation des fluctuations, des crises et des cycles économiques, via une modélisation de la dynamique de marché d'un bien et plus précisément du comportement autour d'une position d'équilibre. Le tout premier modèle exposé prend la forme d'un système dynamique linéaire de dimension 3 :

$$\dot{x} = \alpha x + \beta z$$
$$\dot{y} = \gamma(x + z)$$
$$\dot{z} = \lambda y$$

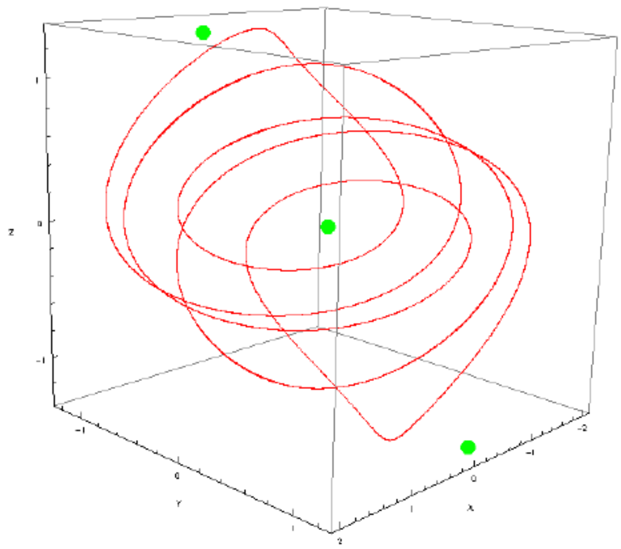
Les variables (d'écart à l'équilibre) x, y et z correspondent respectivement à la demande, au degré de mécanisation de la production et au prix du bien (pour alléger l'écriture la dépendance au temps des trois variables est omise, la notation usuelle $\dot{x}$ désigne la dérivée temporelle d'une variable x, les lettres grecques sont des paramètres fixés).

La simplicité de ce modèle ne permet pas de rendre compte de phénomènes d'oscillations non linéaires avec forte dépendance entre amplitude et fréquence. Par tâtonnement davantage que par des arguments économiques, Rocard aboutit finalement à un système non linéaire de la forme :

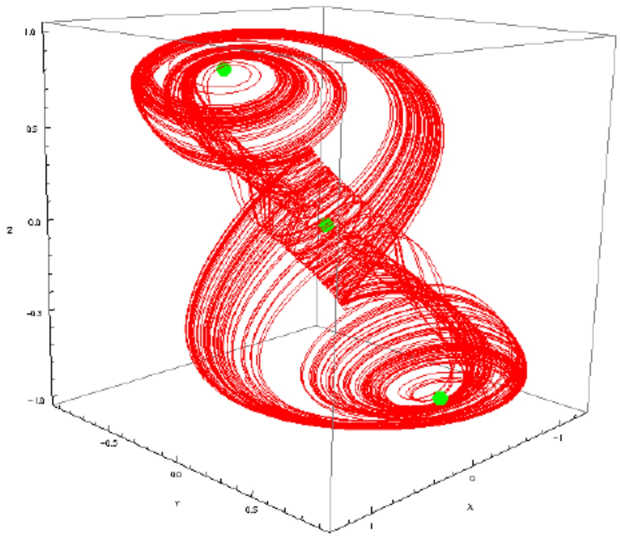
$$\dot{x} = -\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z)$$
$$\dot{y} = \omega\left[\varepsilon + \eta\left(1 - z^2 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)\right]z$$
$$\dot{z} = x$$

Il pressent toute la complexité du comportement à long terme des trajectoires, mais à l'époque les moyens numériques d'investigation lui font défaut pour aller plus loin. A ce compte, on notera que d'autres précurseurs n'en disposaient pas davantage, mais soupçonnaient également le caractère désordonné et « bizarre » des solutions de leurs équations : Poincaré en mécanique céleste avec le problème à N corps vers 1900, ou encore la Britannique Mary Lucy Cartwright (1900-1998) dans l'étude des oscillations forcées d'un tube de néon, autour de 1945.

A la lumière des méthodes d'analyse et des outils informatiques d'aujourd'hui, on peut constater que le modèle ci-dessus présente nombre d'attributs d'une dynamique chaotique [15] et précède celui de Lorenz d'une vingtaine d'années. Selon les valeurs des paramètres, le calcul des exposants de Lyapunov et le tracé des diagrammes de bifurcation mettent en évidence un comportement asymptotique des solutions où coexistent des points d'équilibre, des cycles limites et des attracteurs complexes.



Un exemple de cycle limite de période 5
Extrait de [10]



Un exemple d'attracteur complexe
Extrait de [10]

Ces recherches historiques illustrent, si besoin était, les bénéfices d'un décloisonnement et d'une collaboration entre disciplines. Elles rappellent également le rôle souvent moteur et avant-coureur des applications dans l'élaboration de concepts mathématiquement rigoureux. Sans oublier, depuis l'avènement de l'ordinateur, la place prise par les possibilités d'expérimentation numérique dans la compréhension des phénomènes.

Pour en savoir plus

[1] Franck Jovanovic and Philippe Le Gall, Mathematical Analogies: An Engine for Understanding the Transfers Between Economics and Physics, *History of Economics Review* 79 (2021).

[2] Jean-Michel Courtault et Youri Kabanov (direction), *Louis Bachelier - Aux origines de la finance mathématique*, Presses Universitaires de Franche-Comté (2002).

[3] Mark Davis and Alison Etheridge, *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*, Princeton University Press (2006).

[4] Christian Walter, Les origines du modèle de marche au hasard en finance, *FMSH-WP* n°33 (2013).

[5] Benoît Mandelbrot, *Les objets fractals - Forme, hasard et dimension*, Flammarion (2010).

[6] Vidéo de la conférence du 23 mai 2007 donnée par Nicole El Karoui dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien ».

[7] Pour les mathématiques : le bel ouvrage de Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer (1998).

[8] Cours passionnants de Stéphane Mallat au Collège de France (chaire Sciences de données), en particulier sur ce sujet les années 2024 (apprentissage et génération par échantillonnage aléatoire) et 2025 (génération de données en IA par transport et débruitage). Vidéos et notes de cours sont accessibles en ligne.

[9] Bernard Bru et Marc Yor, La vie de W. Döblin et le pli cacheté 11 668, *La lettre de l'Académie des sciences*, n°2-2001.

[10] Jean-Marc Ginoux, Franck Jovanovic, Riccardo Meucci et Jaume Llibre, Rocard's 1941 Chaotic Relaxation Econometric Oscillator, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 32, n°3 (2022).

[11] Jean-Marc Ginoux, Franck Jovanovic, Riccardo Meucci et Jaume Llibre, Yves Rocard : un précurseur de la théorie du chaos, *Quadrature*, n°126 (2022).

[12] Jean-Marc Ginoux et Franck Jovanovic, Relaxation oscillations in the history of business cycles from 1928 to 1941, *The European Journal of the History of Economic Thought* 31-3 (2023).

[13] Jean-Marc Ginoux et Franck Jovanovic (direction), *Yves Rocard : Portrait d'un grand physicien oublié*, Hermann (2023).

[14] Jean Mawhin, Can the drinking bird explain economic cycles? (A history of auto-oscillations and limit cycles), *Bulletin de la Classe des sciences*, tome 20 (2009).

[15] David Ruelle, *Hasard et chaos*, Odile Jacob (2010).

Mots-clés : systèmes dynamiques, chaos déterministe, Yves Rocard, mouvement brownien.