La règle de la majorité, pourquoi et comment? Questions de recherche.

Gilbert Laffond (Promotion Ensae 1976, Doctorat en économie en 1980, HDR en 1992, Sous-directeur de laboratoire entre 1982 et 1997 puis Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers jusqu'en 2016)

Jean Lainé (Doctorat d'état en économie en 1987, agrégation des Universités en 1994, professeur à l'Ensae entre 1996 et 1998, Chef du département économie, sciences sociales et gestion de l'Ensai entre 1999 et 2009, Professeur à Istanbul Bilgi University entre 2009 et 2014, et depuis 2015 Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers)

Partie 1 : La majorité, pourquoi?

"Il faut donc se résoudre à reconnaître tous les caractères de la volonté commune dans une pluralité convenue", Emmanuel-Joseph Sieyès, Vues sur les moyens d'exécution dont les représentants de la France pourront disposer en 1789, Paris, sans éd., 1789, p. 18.

La règle majoritaire est profondément ancrée dans la représentation populaire de la démocratie, tant en France que dans de nombreux pays. Il n'est pas rare que discours ou articles de presse confondent « le peuple a choisi » et « plus de la moitié des citoyens s'est accordée sur ». Qu'on la présente dans le débat public comme la garante de la stabilité des institutions ou comme l'ennemie radicale d'une bonne représentation des opinions, qu'on lui oppose d'autres méthodes ayant de grandes vertus philosophiques ou pratiques, elle semble installée pour encore longtemps comme norme de la décision publique. On pourrait penser que si les discours sur les vices et vertus de la règle majoritaire agitent régulièrement l'arène politique, les champs de son étude académique concernent seulement la science politique, la sociologie politique ou l'histoire des institutions. Or l'économie théorique, et plus précisément la branche de l'économie théorique appelée théorie du Choix Social s'intéresse depuis longtemps à la règle majoritaire sur laquelle elle produit régulièrement des résultats. C'est à certains de ces résultats que cet article est consacré.

On peut distinguer deux grandes questions qui nourrissent les travaux de recherche. D'abord, pourquoi la règle majoritaire peut-elle être jugée satisfaisante? Après tout, il n'est nullement évident que la loi du nombre soit la plus adéquate à l'idée de démocratie. Si l'on y réfléchit bien, pourquoi le plus grand nombre devrait-il légitimement emporter la décision ? Ensuite, et cela est plus énigmatique, comment choisir conformément au principe de la majorité dans les situations où ce principe ne dit rien d'évident a priori.

Cette première partie est consacrée aux fondements normatifs de la règle majoritaire. Comme nous allons le voir, ils sont loin d'être solides, et beaucoup de questions passionnantes restent sans réponse.

1 Deux résultats fondateurs

Plaçons-nous dans la perspective suivante. Des opinions différentes existent sur un sujet donné, et il s'agit d'agréger ces opinions (ou préférences) en une opinion collective. Une première manière d'appréhender la construction d'une opinion collective est de supposer l'existence d'une vérité que ces opinions défendent. Cette vérité peut être la culpabilité ou l'innocence d'une accusé, ou tout simplement l'intérêt général d'une nation. Pour rester simple, considérons un jury formé de n personnes chargé de se prononcer sur la culpabilité d'un prévenu. Supposons que les erreurs de jugement des jurés soient indépendantes entre elles, et que chacun des jurés ait la même probabilité p de se tromper. On montre que si p est inférieure à $\frac{1}{2}$, la probabilité qu'une majorité des jurés prenne la bonne décision tend vers 1 quand le nombre de jurés tend vers l'infini. Ce résultat célèbre est dû au marquis de Condorcet, et remonte à 1785.[1]

Un autre résultat célèbre montre également en quoi la règle majoritaire est une bonne méthode d'agrégation des opinions individuelles. Considérons un électorat devant choisir le vainqueur parmi deux candidats X et Y. Chaque électeur peut être indifférent entre X et Y ou bien avoir une préférence claire pour l'un d'eux. Ici on ne peut dire que l'un des candidats est intrinsèquement meilleur que l'autre, et il n'y a donc pas de "vérité" cachée. Cependant, on peut rechercher des principes normatifs permettant de définir une manière satisfaisante de définir le choix du candidat qui agrège au mieux les opinions divergentes. Quels principes peut-on définir comme inhérents à l'idée d'une procédure démocratique? L'anonymat, la neutralité et la monotonie sont les principes, ou axiomes, du théorème de May. L'anonymat stipule que le résultat ne doit pas changer si deux électeurs échangent leurs opinions (en d'autres termes, le nom des électeurs n'importe pas), et la neutralité stipule que s'ils ne sont pas ex-aequo, le vainqueur entre X et Y changera si tous les électeurs changent d'opinion (en d'autres termes, le nom des candidats n'importe pas). La monotonie exige qu'un candidat bénéficiant d'un soutien accru dans l'électorat ne peut voir sa position dégradée au regard de la décision collective. Il paraît difficile de rejeter l'un de ces axiomes si l'on a en tête l'idée, même vague, d'une procédure démocratique. Le théorème de May montre que la règle majoritaire est la seule règle de décision qui satisfait simultanément ces troix axiomes.[2] Comprenons bien ce résultat comme une légitimation de la majorité comme mode d'agrégation des opinions et non comme méthode de résolution de conflit, dont l'analyse relève d'une autre thématique de recherche. La limite essentielle de ce résultat est qu'il ne concerne que le cas de deux candidats, et que l'on ne peut espérer le généraliser au cas d'un nombre quelconque de candidats. En effet, la préférence de la majorité n'est pas nécessairement transitive. En d'autres termes, comparer plus de deux candidats selon la majorité peut conduire à une conclusion incohérente. En effet, la préférence majoritaire peut être cyclique. Pour le voir, considérons 3 candidats X, Y et Z et supposons que l'électorat est découpé en tiers. Le premier tiers classe les candidats dans l'ordre $X > Y > Z$, le second dans l'ordre $Z > X > Y$, et le troisième dans l'ordre $Y > Z > X$. Il s'en suit que pour 2/3 de l'électorat (donc une grande majorité), X est meilleur que Y, mais aussi que Y est meilleur que Z, et enfin que Z est meilleur que X. Il n'y a donc pas de vainqueur, c'est-à-dire un candidat meilleur que tous les autres pour une majorité d'électeurs (ce vainqueur est appelé vainqueur de Condorcet). En d'autres termes, la règle majoritaire, qui consisterait à choisir le vainqueur de Condorcet, n'est définie que si ce dernier existe! Le paradoxe de Condorcet, illustré par notre exemple, montre que l'existence d'un vainqueur n'est pas garantie.

Une description intéressante du paradoxe de Condorcet est possible si on change la façon de représenter les préférences des électeurs. Associons "oui" à la paire $\{X, Y\}$ si un électeur pense que X est meilleur que Y, et "non" s'il juge Y meilleur que X. En faisant de même pour les deux autres paires d'électeurs, le paradoxe de Condorcet correspond à la situation de la table 1 ci-dessous :

[1] Jean Antoine Nicolas de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie royale, 1785. Ce théorème a fait l'objet de travaux assez récents, portant notamment sur la levée de l'hypothèse d'indépendence des probabilités d'erreur.

[2] Kenneth O. May (1952) *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions*, Econometrica, 20:680–684.

Table 1: le paradoxe de Condorcet

	$\{X,Y\}$	$\{Y,Z\}$	$\{Z,X\}$
33,3%	*oui*	*oui*	*non*
33,3%	*oui*	*non*	*oui*
33,3%	*non*	*oui*	*oui*
majorité	*oui*	*oui*	*oui*

La préférence majoritaire pour chaque paire de candidats est donnée par $X > Y > Z > X$. On retrouve bien le fait qu'il n'y a pas de vainqueur, ou ce qui revient au même, le fait que la régle majoritaire conduit à un cycle. Ceci illustre le fait bien connu qu'un ensemble ne satisfait pas nécessairement une propriété que toutes ses parties satisfont.[3] Ici, la propriété est la transitivité, satisfaite par préférence individuelle mais pas par la préférence majoritaire.

Elargissons le propos, et demandons-nous si, en présence d'au moins trois candidats, il existe une façon d'agréger des préférences individuelles en une préférence collective transitive qui satisfait quelques bonnes propriétés, à l'instar de la règle majoritaire avec deux candidats. Quelles propriétés? En voici trois. La première stipule que la préférence collective entre deux candidats ne devrait dépendre que des préférences individuelles entre ces deux seuls candidats (comme nous l'avons fait pour la préférence majoritaire dans le cas du paradoxe de Condorcet). La deuxième est que si tous les électeurs s'accordent à dire qu'un candidat est meilleur qu'un autre, alors il doit en être de même collectivement. La troisième interdit que la préférence collective soit dictée par celle d'un seul individu. Le célébrissime théorème d'Arrow (1951) montre que ces trois propriétés sont mutuellement incompatibles (sauf à interdire certaines préférences individuelles).[4] Ce théorème a nourri des milliers d'articles montrant comment cette frontière entre le possible et l'impossible peut se déplacer au gré de l'altération de l'une de ces trois propriétés ou des restrictions sur les classements individuels possibles, ou comment ce résultat, initialement établi dans un cadre d'analyse fini, peut être étendu à des ensembles infinis de candidats (comme ceux considérés par les modèles économiques).

2 De nombreux paradoxes

La règle majoritaire vérifie les trois propriétés du théorème d'Arrow, mais hélas elle ne permet pas toujours de contruire une préférence collective, faute de vérifier toujours la propriété de transitivité. On peut considérer bien d'autres propriétés que la transitivité et parvenir à des conclusions similaires. Un exemple célèbre est donné par le paradoxe doctrinal, selon lequel l'agrégation de jugements individuels par vote majoritaire peut aboutir à un jugement collectif absurde. Prenons l'exemple suivant. Une cour constituée de trois juges A, B, et C doit statuer sur une plainte déposée à la suite d'une rupture de contrat. L'examen de la plainte consiste à statuer d'une part sur la légalité du contrat et d'autre part sur l'existence d'une rupture avérée de ce contrat. D'après la loi, réparation

[3] Bien qu'il illustre les limites de l'approche réductionniste, ce constat ne saurait être perçu comme une critique des méthodes de l'analyse statistique, dont un principe fondateur est que la connaissance d'une partie peut informer avec une bonne précision sur le tout.

[4] Voir Arrow, K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values , Second Edition*, 1963, New York, Wiley. Une généralisation trop méconnue du théorème d'Arrow est due à Wilson, qui montre qu'un résultat essentiellement identique à celui d'Arrow peut être obtenu sans retenir la deuxième propriété, appelée unanimité ou propriété de Pareto. Voir R. Wilson (1972) *Social choice theory without the Pareto Principle*, Journal of Economic Theory 5:478-486.

sera accordée au plaignant si et seulement si la cour établit que le contrat était légal et a bien été rompu. Considérons la position des juges ci-dessous :

Table 2: le paradoxe doctrinal

	légalité	*rupture*	*réparation*
juge A	*oui*	*non*	*non*
juge B	*non*	*oui*	*non*
juge C	*oui*	*oui*	*oui*
Cour	*oui*	*oui*	*non*

On voit que bien entendu chacun des juges applique scrupuleusement la loi. Mais si la décision de la Cour résulte de la position majoritaire sur d'une part la légalité du contrat et d'autre part sa violation, alors nous avons largement matière à recours. Ici c'est une relation logique entre décisions qui est satisfaite par toutes les parties mais pas par l'ensemble. Le paradoxe doctrinal est un exemple fondateur de la théorie de l'agrégation des jugements, champ de recherches très actif qui généralise l'approche d'Arrow.[5]

Les limites de la règle majoritaire sont tout aussi saisissantes dans le cas d'un vote multidimensionnel. Prenons l'exemple d'un référendum multiple, dans lequel on demande aux électeurs de se prononcer par oui ou par non à trois questions. Supposons par ailleurs que chaque électeur classe les résultats du référendum selon le nombre de questions auxquelles les réponses sont les siennes, ce qui implique que les questions sont considérées comme indépendantes les unes des autres. La table 3 donne un résultat possible du référendum multiple.

Table 3: le paradoxe d'Ostrogorski

	20%	20%	20%	40%
question 1	*oui*	*oui*	*non*	*non*
question 2	*non*	*oui*	*oui*	*non*
question 3	*oui*	*non*	*oui*	*non*

Ce résultat est que le "non" gagne pour chaque question (puisque 60% des électeurs ont dit non). Mais selon le critère de préférence ci-dessus, 60% des électeurs auraient préféré le résultat (oui,oui,oui), avec lequel ils ont deux réponses communes, au résultat inverse (non,non,non). Et cherchez un vainqueur de Condorcet, vous n'en trouverez pas. Ce paradoxe, appelé paradoxe d'Ostrogorki, montre que l'existence d'un vainqueur de Condorcet sur chaque dimension ne suffit pas à garantir celle d'un vainqueur général, et ceci même lorsque les diverses dimensions sont jugées mutuellement indépendantes par les électeurs.[6] Ce problème a fait l'objet de nombreuses publications (qui forment la littérature sur le "chaos majoritaire"), notamment dans le cas des modèles de

[5] Le paradoxe doctrinal est dû à Kornhauser et Sager (2004) *The many as one: Integrity and group choice in paradoxical cases.* Philosophy and Public Affairs 32:249–276. Pour une revue de la théorie de l'agrégation des jugements, voir P. Mongin (2012) *The doctrinal paradox, the discursive dilemma, and logical aggregation theory,* Theory and Decision 73:315-355. Voir également C. List (2012) *The theory of judgment aggregation: an introductory review,* Synthese 187:179–207.

[6] Plus de détails sur ce paradoxe sont donnés dans les publications suivantes des deux auteurs: *Single-switch preferences and the Ostrogorski paradox,* Mathematical Social Sciences 52:49-66 (2006), *The budget-voting paradox,* Theory and Decision 64:447–478 (2008), *Condorcet Choice and the Ostrogorski paradox,* Social Choice and Welfare 32: 317–333 (2009), *Unanimity and the Anscombe's paradox,* TOP 21:590–611 (2013).

vote spatial.[7] Ces modèles généralisent des situations simples comme celle où l'on doit choisir un programme consistant en un taux de taxe à la valeur ajoutée et un taux marginal d'imposition des revenus. On montre alors que même si la règle majoritaire est bien définie sur chaque dimension, chaque point de l'espace peut être atteint par une suite de votes majoritaires à partir de n'importe quel autre point. En d'autres termes, tout choix possible est moins bon qu'un autre pour une majorité d'électeurs, et améliorer pas à pas la situation selon la préférence majoritaire peut conduire n'importe où. C'est le chaos.

La règle majoritaire, source de chaos? D'un point de vue purement théorique, la réponse est oui s'il existe trois candidats ou plus.[8] Mais une théorie complète exige de mesurer la sévérité du problème. Un axe de recherche très actif consiste à mesurer la fréquence avec laquelle un vainqueur de Condorcet existe, et plus généralement la fréquence des différents paradoxes de la majorité[9] Un autre axe de recherche, dessiné dès la publication du théorème d'Arrow, consiste à caractériser les situations dans lesquelles un vainqueur de Condorcet existe. On apprécie alors la sévérité du problème à l'aune des conditions qui permettent de l'éviter. A titre d'exemple, si l'on doit choisir un taux de taxe entre 0 et 100% , on peut raisonnablement penser que les électeurs ont en tête un taux optimal et que plus on s'en éloigne, moins ils sont satisfaits. Pour ces préférences dites unimodales, et si le nombre d'électeurs est impair, il existera toujours un vainqueur de Condorcet, qui est la médiane des taux idéaux.[10]

D'un point de vue pragmatique, on pourrait avancer que la règle majoritaire rencontrant des difficultés majeures dès qu'il existe au moins trois candidats, une solution est de se ramener systématiquement à la situation où il n'y a que deux candidats. C'est en substance ce que permet le scrutin majoritaire uninominal à deux tours, qui prévaut pour les élections locales, législatives et/ou présidentielles dans une cinquantaine de pays, dont la France. C'est également en substance ce qui prévaut dans les pays, comme les Etats-Unis, dont la vie politique est essentiellement bipartite. Mais là encore, cette solution n'est pas si simple à défendre. Bien qu'encore largement soutenu en France depuis son instauration en 1958 pour les élections législatives, et 1962 pour l'élection présidentielle, le scrutin majoritaire uninominal à deux tours souffre de défauts majeurs.[11] Quant au vote majoritaire qui sous-tend l'élection présidentielle aux Etats-Unis, il a montré ses limites en 2000 et en 2016 pour une raison qui ne tient pas ni au nombre de candidats, ni au mode de représentation des états,

[7] Parmi les travaux les plus représentatifs, voir R.D. McKelvey (1979) *General Conditions for Global Intransitivities in Formal Voting Models*, Econometrica 47:1085-1112, L. Cohen (1979) *Cyclic Sets Multidimensional Voting Models*, Journal of Economic Theory 20:1-12, N. Schofield (1986) *Social Choice and Democracy*, Berlin Springer- Verlag, et D. Richards (1994) *Intransitivities in Multidimensional Spatial Voting Period Three Implies Chaos,* Social Choice and Welfare 11:109-119.

[8] A ce propos, notons que du seul point de vue de la théorie du choix social, la prise en compte du vote blanc comme opinion à part entière ne pose un problème nouveau que si l'élection porte sur deux candidats. En effet, elle créerait le risque d'une majorité cyclique.

[9] Une excellente revue de cette littérature est due à W. Gehrlein et D. Lepelley (2017), *Elections, Voting Rules and Paradoxical Outcomes*, Springer. Mentionnons seulement ici que l'existence d'un cycle majoritaire n'est pas une pathologie rare.

[10] Ce théorème dit de l'électeur médian est connu depuis longtemps. Voir A. Downs (1957) *An Economic Theory of Democracy,* Harper, et D. Black (1958) *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press. Il est facile de voir que les préférences des électeurs dans le paradoxe de Condorcet ne sont pas unimodales : on ne peut classer les trois candidats sur un axe de telle sorte que pour chaque électeur un des candidats soit un idéal dont il conviendrait de ne pas s'éloigner. Pour une revue générale de la littérature sur les restrictions sur les préférences individuelles et le théorème d'Arrow, voir W. Gaertner (2001) *Domain conditions in social choice theory*, Cambridge University Press.

[11] En particulier, il ne respecte pas la monotonie, et il peut ne pas élire le vainqueur de Condorcet quand celui-ci existe. Ce système est classé par la plupart des théoriciens parmi les pires procédures de vote possibles.

mais au simple fait que le vainqueur n'est pas désigné par le vote populaire. De ce point de vue, le problème est formellement assez proche du paradoxe d'Ostrogorski. Pour le voir, considérons la table 4 ci-dessous :

Table 4: le paradoxe du référendum

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ \hline rep & rep & dem & dem & dem \\ dem & rep & rep & dem & dem \\ rep & dem & rep & dem & dem \end{pmatrix}$$

Cette table contient quinze cases marquées *"rep"* pour parti républicain ou *"dem"* pour parti démocrate. Chaque case correspond à un électeur dont la préférence va donc a un des deux partis. On voit que 6 électeurs sur 15 votent pour le parti républicain. Si le pays est découpé en 5 districts A, B, C, D, E (de tailles égales) et si, comme c'est le cas aux Etats-Unis, "the winner-takes-all" (c'est-à-dire avoir la majorité des voix dans un district donne le soutien de tous les représentants de ce district), le parti républicain gagne dans trois districts sur cinq et remporte donc l'élection, alors que 60% des électeurs sont favorables au parti démocrate.[12] Ainsi, comme le montrent le paradoxe doctrinal, le paradoxe d'Ostrogorski et celui du référendum, la procédure selon laquelle la majorité s'exprime importe autant que le nombre de candidats.[13]

En conclusion, notre propos peut se résumer à ce simple constat. Parfaitement justifiée dans le cas très particulier d'un électorat se prononçant directement sur deux candidats, la règle majoritaire n'est pas toujours opérationnelle s'il existe au moins trois candidats, puisqu'elle peut ne pas désigner un vainqueur évident. Par ailleurs, ses qualités et ses défauts ne peuvent être évalués sans faire référence aux modalités de sa mise en oeuvre pratique. Une théorie complète de la régle majoritaire ne peut donc répondre à la question *La majorité, pourquoi?* en ignorant la question *La majorité, comment?* C'est à cette dernière question que nous consacrerons la seconde partie de cet article.

[12] On montre que ce paradoxe peut prévaloir si la majorité en faveur du vaincu est égale à presque 75%. Pour une généralisation du paradoxe du référendum, voir Laffond et Lainé (2000) *Representation in majority tournaments,* Mathematical Social Sciences 39:35-53, Dindar, Laffond et Lainé (2017) *The strong referendum paradox*, Quality and Quantity 51:1707–1731, et Dindar, Laffond et Lainé (2021) *Referendum Paradox for Party-List Proportional Representation*, Group Decision and Negotiation 30:191-220.

[13] On peut remarquer que si on distribue les quinze électeurs selon les trois lignes du tableau, on obtient trois districts de cinq électeurs, et le parti démocrate comme vainqueur dans les trois districts. Le découpage électoral est donc déterminant, ce qui explique pourquoi toute réforme de la carte électorale suscite polémiques et controverses.