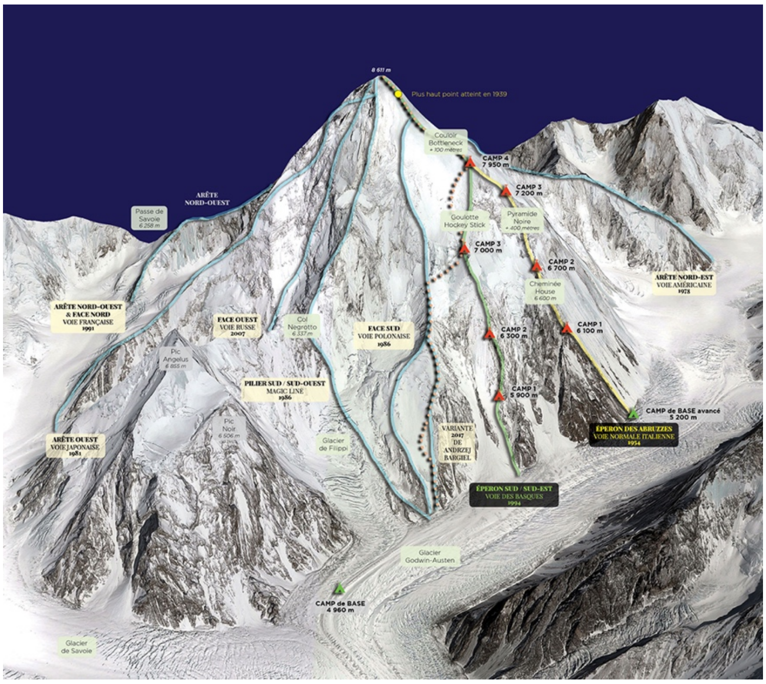
Les mathématiques : pourquoi s'en faire une montagne ?
Nicolas Curien – 1er mars 2021

Auteur : Nicolas Curien, membre de l'Académie des technologies.

Mots clés : mathématiques, cognition, montagne, K2, triangles, parallélogrammes, transformations affines, équation du second degré, degrés de liberté, équation d'état.



À la mémoire d'André Warusfel[1]

Résoudre un problème de mathématiques est un peu comme gravir une montagne. Si, à l'instar du sommet de la seconde, le résultat du premier est unique, il existe souvent, en revanche, de multiples démonstrations, comme autant de voies d'escalade… et plusieurs tentatives sont parfois nécessaires avant de remporter la victoire. De même qu'on ne devient véritablement familier d'une montagne qu'après en avoir exploré tous les angles d'attaque, éperons, arêtes et couloirs, de même on ne comprend vraiment un problème de maths qu'après l'avoir abordé de plusieurs manières. Certaines montagnes, telle la pyramide du K2, deuxième sommet du monde situé aux fins fonds du massif du Karakorum (*cf.* photo), montrent une pureté esthétique remarquable, alors que leur ascension est pourtant difficile, voire meurtrière. Il existe, de même, des questions mathématiques dont la grande simplicité apparente suscite l'intérêt et inspire la confiance, alors que leur résolution,

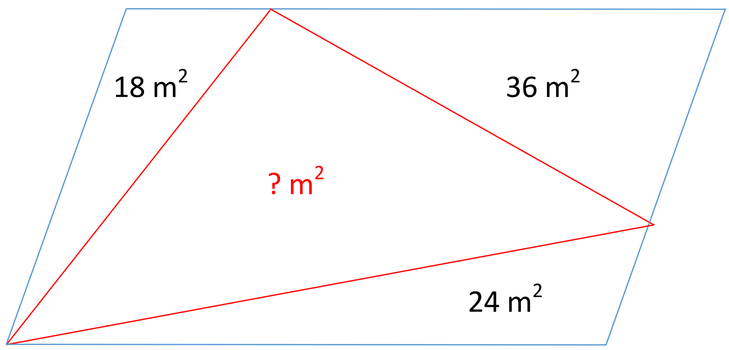
[1] André Warusfel, mathématicien connu pour son souci de la pédagogie et de la communication scientifique, fut mon professeur en classe de mathématiques supérieures au lycée Louis-le-Grand, au cours de l'année scolaire 1967-68. Il est l'auteur de nombreux ouvrages, dont un *Dictionnaire raisonné des mathématiques*, Éditions du Seuil, 1966, ou encore *Les mathématiques : plaisir et nécessité*, Éditions Vuibert, 2000, dont l'esprit m'a inspiré ce modeste essai.

beaucoup moins aisée qu'il n'y paraît de prime abord, exigera de contourner les profondes et tortueuses crevasses de la fausse évidence.

L'objectif du présent article est de montrer, à travers un exemple parlant, comment l'esprit d'un « honnête homme », pas nécessairement un alpiniste aguerri aux plus hauts massifs mathématiques, mais disons un trekkeur raisonnablement expérimenté, est en mesure d'évoluer sur un relief plus accidenté que le premier examen ne pourrait le lui laisser croire. Ami lecteur, n'aie nulle crainte, tu pourras suivre le sentier sans difficulté, avec un équipement réduit à l'indispensable : dans ton sac à dos, emporte seulement quelques rudiments de géométrie, d'algèbre et d'analyse ; ceux que t'a laissés la réminiscence de tes études secondaires suffiront amplement. Toutefois, n'oublie pas de te munir de l'essentiel : ta capacité de réflexion, ta curiosité intellectuelle, et ton imagination créative !

Malaise dans l'air raréfié des aires

L'heure est maintenant venue de dévoiler notre mini K2 pour mathématiciens amateurs, un exercice qui mériterait, si ce n'est fait, les honneurs des Olympiades internationales de mathématiques[2]. Le problème tient entièrement dans le point d'interrogation rouge, tracé au centre de la figure ci-dessous ! Qu'y voit-on ? Un parallélogramme bleu, découpé façon puzzle en quatre triangles. Les aires des trois triangles extérieurs sont données, respectivement 18 m^2, 24 m^2, 36 m^2, et la question est toute simple : quelle est la mesure manquante, combien vaut l'aire du triangle rouge central ?



L'observation empirique d'un sujet « lambda » soumis à cette énigme, sorte de montagnard du dimanche surpris sur un glacier sans entraînement et en sandales, met en évidence trois phases comportementales. Dans une première phase d'agitation fébrile, accompagnée de questions assez peu pertinentes, du genre « Quelle est l'échelle de la figure ? », l'individu manque d'oxygène, perd son souffle et prend peu à peu conscience qu'il est en réalité dans la totale incapacité de résoudre la question dans un délai rapide, autrement qu'approximativement ou en trichant.

Dans une deuxième phase, aussi désespérée que la première mais plus industrieuse, il n'est pas rare que notre « touriste » aux abois se livre sans scrupule à l'une ou l'autre des deux stratégies suivantes, la première désinvolte, la seconde illicite :

[2] Championnat international de mathématiques réservé à des élèves en fin d'études secondaires, triés sur le volet, spécifiquement entraînés, et concourant pendant deux jours sur des séries d'épreuves, faisant davantage appel au raisonnement qu'à des connaissances sophistiquées.

- L'approximation consiste à estimer que, « à vue de nez » et sous l'hypothèse que la figure respecte l'échelle, l'aire inconnue est à peu près deux fois plus étendue que celle marquée 36 m^2, trois fois plus que celle marquée 24 m^2, et quatre fois plus que celle marquée 18 m^2. Si tel est bien le cas – et c'est si beau que cela ne peut être que vrai ! –, alors la réponse à la question est 72 m^2. Bien essayé… mais faux ! La bonne réponse étant 66 m^2, le tir n'aura certes manqué le cœur de cible que d'une dizaine de pour cent mais, contrairement au physicien, tout mathématicien qui se respecte ne peut tolérer la moindre marge d'erreur !
- La tricherie consiste, quant à elle, à se saisir d'un objet strictement interdit dans le cadre du protocole, à savoir une règle graduée, et à s'en servir pour prendre trois mesures : la longueur commune des deux côtés horizontaux de la figure, soit 8 cm ; puis la distance verticale séparant ces côtés, soit 4,5 cm ; enfin, la longueur du côté horizontal du triangle marqué 18 m^2, soit 2 cm. De ces trois mesures, on déduit : d'une part, l'aire du parallélogramme bleu, soit 8 x 4,5 = 36 cm^2 ; d'autre part celle du triangle représentatif d'une superficie de 18 m^2, soit (1/2) x 2 x 4,5 = 4,5 cm^2. On en déduit que 1 cm^2 sur la figure correspond à 18/4,5 = 4 m^2 dans la réalité et que l'aire du parallélogramme bleu correspond par conséquent à une superficie de 4 x 36 = 144 m^2. Par différence, l'aire camouflée sous le point d'interrogation vaut donc 144 – 18 – 24 – 36 = 66 m^2. Réponse exacte, cette fois, mais obtenue par un moyen hautement déloyal ! C'est un peu comme si l'on avait pris le téléphérique, au lieu de grimper à pied !

À l'issue de la deuxième phase, le sujet essuie une critique acerbe de la part de son guide accompagnateur, soit parce que son résultat est faux et issu d'un pseudo-raisonnement extrêmement peu rigoureux, soit parce qu'il est juste mais déduit par l'entremise d'un artifice prohibé. Une troisième phase s'ensuit, beaucoup plus brève que les précédentes. Elle se traduit par un long soupir, bientôt suivi de la capitulation définitive : « Alors, si c'est comme ça… je ne sais plus comment faire, j'abandonne ! ». Pour être parfaitement précis et objectif, chez certains sujets singulièrement non coopératifs, ou que l'on aura insuffisamment su motiver, on constate une transition directe de la phase 1 vers la phase 3.

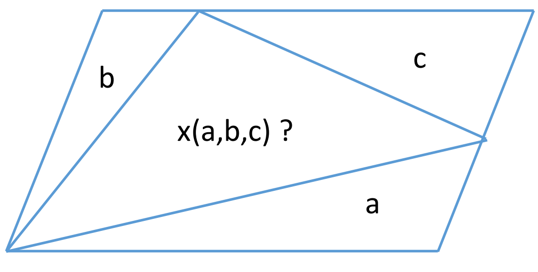
Remontant à l'amont du processus, l'excitation cérébrale stérile de la phase 1 n'est pas inintéressante à analyser plus en détail. Le problème, reconnaissons-le, est déroutant : les données sont des aires, et non pas des longueurs ou des angles, comme dans la plupart des exercices classiques de géométrie ; et la grandeur inconnue est une aire, également. Dans ce désert des aires arides, le sujet cherche tout d'abord désespérément à déduire l'aire du triangle central, par différence entre l'aire totale de la figure et les trois aires périphériques ; mais ô rage, ô désespoir, l'aire totale n'est pas précisée et aucun moyen de la calculer n'apparaît clairement ! Ensuite, le malheureux réalise qu'une infinité de triangles distincts ont une même aire fixée ; par conséquent, les trois données du problème ne déterminent pas sans ambiguïté les longueurs des côtés des triangles et du parallélogramme de la figure, des dimensions linéaires pourtant souhaitables à connaître, afin de pouvoir évaluer l'aire inconnue. Enfin, le sujet en vient à penser que l'on s'est moqué de lui de manière éhontée, parce qu'on lui a caché certains paramètres essentiels au calcul, notamment les proportions du parallélogramme bleu, ainsi que l'angle formé par ses axes directeurs. La suite nous révèlera d'ailleurs que notre homme n'a qu'à moitié tort… Ces différents facteurs provoquent chez lui colère et révolte, causant le grand n'importe quoi de la phase 2 puis l'abandon de la phase 3.

Un tel échec est sans conséquence et sans importance, m'objectera-t-on peut-être, puisque le problème posé est purement abstrait et sans la moindre application pratique ! Cette remarque coupable, qui vise à déguiser un désastre cognitif en dérision touchant au cynisme, appelle deux commentaires correctifs. *Primo*, tout défi comporte en soi un intérêt qui ne se mesure pas à la seule aune de l'utilité de l'action entreprise : sinon, pourquoi l'homme s'acharnerait-il à vouloir battre des records sportifs et à escalader des montagnes ? *Secundo*, de nombreux problèmes, *a priori* perçus comme purement abstraits, possèdent des caractéristiques structurelles qui en font des « maquettes de raisonnement », pouvant précieusement éclairer l'esprit dans des situations concrètes. Et c'est bien le cas du problème qui nous occupe ici. Pour nous en persuader, descendons temporairement des « hauteurs où pense la lumière[3] »… pour nous rendre à l'étude notariale…

La prof de maths, ses frères et le juriste

Trois frères et leur sœur sont réunis chez un notaire. La fratrie possède en indivision une vaste parcelle en forme de parallélogramme, qu'elle souhaite vendre dans les plus brefs délais. Une règle de répartition doit être fixée, afin de se partager le fruit de la vente. Historiquement, mais officieusement, chacun a la jouissance d'une sous-parcelle triangulaire (*cf.* figure). Les frères, tenants des trois sous-parcelles « externes » ont chacun eu recours un arpenteur professionnel pour faire métrer leurs terrains respectifs. Ils transmettent au notaire ces mesures dûment certifiées, soit a = 1,8 ha, b = 2,4 ha et c = 3,6 ha. En vue de pouvoir arrêter la règle de partage, l'homme de loi demande alors à la quatrième protagoniste si elle a fait de même pour sa sous-parcelle « interne »,. Cette dernière, professeure de mathématiques spéciales dans un prestigieux lycée parisien, répond par la négative et, d'un ton passablement énervé, ajoute que c'est sans gravité, qu'il suffit de consulter le registre cadastral afin d'obtenir la superficie totale de la parcelle indivise et que celle de sa sous-parcelle en dérivera alors trivialement, par soustraction.

Agacé lui aussi, le notaire prévient alors ses clients que le cadastre vient de subir une très sévère cyberattaque et ne prévoit pas de rétablir le service de consultation avant plusieurs semaines ! À ces mots, sous les yeux réprobateurs de ses frères et du juriste, la matheuse se gratte un instant la tête, avant d'affirmer, à la surprise générale, que l'on peut malgré tout se passer d'un quatrième métrage car, avec les trois mesures a, b et c communiquées par ses frères, elle dispose d'assez d'information pour calculer tout à la fois, et l'aire x de sa propre sous-parcelle, et l'aire y de la parcelle totale.



Joignant aussitôt le geste à la parole, elle dégaine son smartphone, active la fonction calculette et, à peine quelques secondes plus tard, elle énonce, pas fâchée d'elle-même : « Ma sous-parcelle mesure 6,6 ha et l'aire totale vaut 14,4 ha. J'en détiens ainsi les 11/24 et mes frères, respectivement les 3/24 (= 1/8 ~ 1,8 ha), les 4/24 (= 1/6 ~ 2,4 ha) et les 6/24 (= 1/4 ~ 3,6 ha) ». Et elle conclut, non sans

[3] *Cf.* Guillaume Apollinaire, *Alcools*, Le Brasier.

une certaine superbe, à la hauteur de son aussi brillant que mystérieux calcul : « Je pense, Maître, que vous disposez désormais de tous les éléments nécessaires pour remplir votre office, sans que nous devions à nouveau solliciter l'expert-arpenteur. Ou bien me trompé-je ? »

L'arrivée au camp de base

Au cas d'espèce, n'en déplaise aux fâcheux railleurs, la clef de notre petit problème mathématique aura ouvert à la fratrie la porte d'une appréciable économie de temps et de frais d'expertise. Mais comment la prof de maths a t-elle procédé ? Comment, pour le plus grand bonheur de sa famille et le plus grand soulagement du notaire, a-t-elle échappé à la sinistre chronologie des trois phases, comment est-elle venue à bout de notre mini K2 géométrique ? Dans l'après-coup, le plus curieux et le plus téméraire d'entre ses frères a osé l'interroger à ce sujet et voici la réponse qui lui a été faite :

« Euh, écoute, c'est très simple ! J'ai établi de tête la formule générale qui donne l'aire triangulaire interne x en fonction des trois aires triangulaires externes a, b et c, soit :

$x(a, b, c) = [(a + b + c)^2 – 4a.b]^{1/2}$

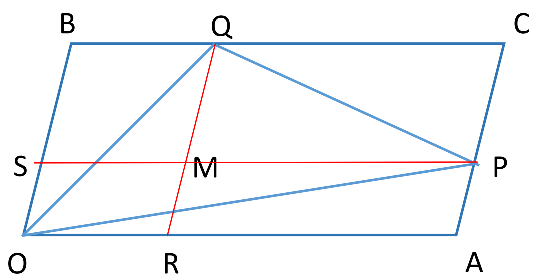
J'ai ensuite calculé la valeur numérique de x qui correspondait à vos trois données puis j'ai déduit l'aire totale de la parcelle par addition : $y = a + b + c + x$. Et voilà, le tour était joué, et en se passant du cadastre ! »

Ce message est très riche, car il indique « l'algorithme » que devrait utiliser le notaire, si jamais un cas semblable se présentait à nouveau à lui, avec d'autres valeurs numériques des aires a, b et c. En revanche, nous ignorons toujours à ce stade d'où provient la formule magique si promptement établie de tête par la femme de l'art ; une formule miraculeuse, comportant des expressions algébriques du second degré, dont la complexité relative, au regard de la simplicité épurée de la figure, peut légitimement étonner ! On vérifie néanmoins que sont satisfaites deux conditions *a priori* requises, l'homogénéité de degré un (stabilité du résultat par changement d'unité d'aires) et la symétrie par rapport aux variables a et b (stabilité par changement d'orientation de la figure) :

$\forall \lambda > 0 : x(\lambda.a, \lambda.a, \lambda.a) = \lambda.x(a, b, c) \quad , \quad x(b, a, c) = x(a, b, c)$

Ici s'achève la marche d'approche. Nous voici, vaillants randonneurs, rendus au camp de base. Il nous revient maintenant d'explorer les voies d'ascension. Rappelons à cet effet le but de l'expédition, dans un vocabulaire géométrique précis :

Soit un parallélogramme OACB (dans le sens direct). Soit P un point sur le côté AC et Q un point sur le côté BC. Soit a l'aire du triangle OAP, b celle du triangle OBQ et c celle du triangle PCQ. Calculer, en fonction des aires a, b et c, l'aire x du triangle OPQ et celle y du parallélogramme OACB.



La voie normale ou l'arête des forts en géométrie

Ajouter à une figure des traits de construction fait parfois merveille. La parallèle à OA passant par P coupe OB en S et la parallèle à OB passant par Q coupe OA en R, ces deux droites se coupant entre elles en M. Soit y l'aire du parallélogramme OACB et z celle du parallélogramme ORMS. L'aire du parallélogramme OAPS vaut 2a, celle de ORQB vaut 2b et celle de MPCQ vaut 2c. La somme de ces trois aires recouvre l'aire totale y de OACB, en comptant deux fois l'aire z de ORMS, d'où :

$y + z = 2(a + b + c)$

Par l'affinité géométrique de directrice OA, de base OB et de rapport $r^* = OR/OA$, le parallélogramme ORQB d'aire 2b est l'image du parallélogramme OACB d'aire y, tandis que le parallélogramme ORMS, d'aire z, est l'image du parallélogramme OAPS, d'aire 2a, d'où :

$2b/y = z/2a = r^* \Rightarrow y.z = 4a.b$

Les aires y et z de OACB et ORMS, dont la somme vaut 2(a + b + c) et le produit vaut 4a.b, sont donc respectivement la plus grande et la plus petite racine de l'équation du second degré en t :

(E) $t^2 – 2(a + b + c).t + 4a.b = 0$

D'où :

$y = a + b + c + [(a + b + c)^2 – 4a.b]^{1/2}$

$z = a + b + c – [(a + b + c)^2 – 4a.b]^{1/2}$

On obtient enfin l'aire recherchée x du triangle intérieur OPQ en retranchant, de l'aire totale y de la figure, la somme des aires des trois triangles extérieurs OAP, OBQ et PCQ :

$x = y – (a + b + c)$

$x =[(a + b + c)^2 – 4a.b]^{1/2}$

Ainsi, la mesure x de l'aire intérieure OPQ n'est autre que le discriminant réduit de l'équation (E), que nous qualifierons pour cette raison « d'équation canonique » du problème.

Arrivés au sommet, le vertige que nous donne cette première approche tient à un constat fascinant : notre problème possède des caractéristiques spécifiques suffisamment fortes pour que l'on puisse inférer la mesure d'un tout (l'aire y), à partir des mesures d'un sous-ensemble seulement de ses parties, les aires a, b et c à l'exclusion d'une aire manquante x, que l'on infère du même coup. Cette propriété paradoxale contrarie l'intuition et fait que l'esprit, contrarié par un biais cognitif, peine autant à trouver la solution : il est en effet obnubilé par l'idée, inappropriée au cas d'espèce, qu'il lui faudrait connaître la mesure de la partie manquante afin de déterminer celle du tout, et réciproquement ! Pour sortir de cette errance d'un raisonnement en boucle, une fulgurance est nécessaire : en l'occurrence, s'apercevoir que les quatre pièces triangulaires formant le puzzle de la figure sont des moitiés de « petits » parallélogrammes, copies réduites du « grand » qui les englobe.

Encadré : le couloir du sachant ou la preuve par les produits vectoriels

Une démonstration alternative, ascension plus technique et plus directe que la voie normale, fait appel à la notion de produit vectoriel (noté ∧). On se rappelle que, dans l'espace 3D, le produit de deux vecteurs est un vecteur formant un trièdre direct avec ses deux arguments et dont le module est égal à l'aire du parallélogramme engendré par ceux-ci. Conservant les mêmes notations que précédemment et notant les vecteurs en caractères gras, on a :

$y = || \mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB} ||$

Notant $r^* = OR/OA$ et $s^* = OS/OB$, il vient :

$2a = || \mathbf{OA} \wedge \mathbf{OS} || = || \mathbf{OA} \wedge s^*.\mathbf{OB} || = s^*.y \;\Rightarrow\; s^* = 2a/y$

$2b = || \mathbf{OR} \wedge \mathbf{OB} || = || r^*.\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB} || = r^*.y \;\Rightarrow\; r^* = 2b/y$

L'aire recherchée x du triangle OPQ est telle que :

$2x = || \mathbf{OP} \wedge \mathbf{OQ} || = || (\mathbf{OA} + \mathbf{AP}) \wedge (\mathbf{OB} + \mathbf{BQ}) || = || (\mathbf{OA} + s^*.\mathbf{OB}) \wedge (\mathbf{OB} + r^*.\mathbf{OA}) ||$

En utilisant la distributivité du produit par rapport à l'addition ; en se rappelant par ailleurs que le produit de deux vecteurs colinéaires est nul et que la transposition des deux arguments d'un produit change le signe de ce dernier, on obtient :

$2x = || (1 - r^*.s^*). (\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB}) || = (1 - r^*.s^*).y = (1 - 4a.b/y^2).y$

Puisque, par construction, $x = y - (a + b + c)$, on en déduit la relation :

$2y - 2(a + b + c) = y - 4a.b/y$

$y - 2(a + b + c) = - 4a.b/y$

$y^2 - 2(a + b + c).y = - 4a.b$

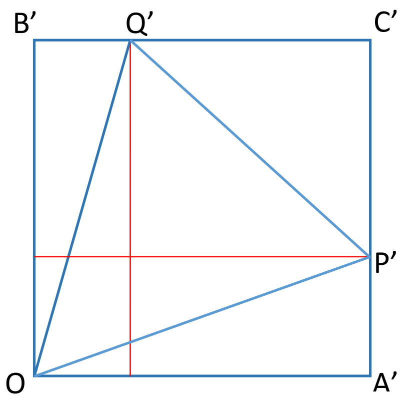
$[y - (a + b + c)]^2 = (a + b + c)^2 - 4a.b$

D'où, finalement :

$x = [(a + b + c)^2 - 4a.b]^{1/2}$, $y = a + b + c + [(a + b + c)^2 - 4a.b]^{1/2}$

La piste du Sioux ou la ruse de la quadrature

Une astuce, ou plus communément *siouxerie* dans le sabir des classes préparatoires scientifiques, consiste à remarquer que toutes les aires constitutives du problème demeurent invariantes lorsque la figure est déformée par une certaine classe de transformations affines : cette classe est celle engendrée par des « transvections » (transformations couchant ou redressant les parallélogrammes dans l'une ou l'autre de leurs deux directions) et par des « contractions-élongations » (compositions de deux affinités dont la directrice et la base sont échangées et les rapports inverses l'un de l'autre). En opérant de telles transformations iso-aréales (qui conservent les aires mais ni les distances, ni les angles), le problème peut être ramené à une unique « configuration carrée », équivalente à la configuration générale au regard de la question à résoudre. Et cette configuration particulière, en offrant au Sioux des angles droits et des distances, se prête plus aisément au calcul que la configuration générale !



Si ω désigne le côté du carré OA'C'B' et donc $\omega^2 = y$ l'aire de ce carré, il vient successivement :

$OA'.A'P' = 2a \;\Rightarrow\; A'P' = 2a/\omega$

$OB'.B'Q' = 2b \Rightarrow B'Q' = 2b/\omega$

$P'C' = A'C' – A'P' = \omega – 2a/\omega$

$Q'C' = B'C' – B'Q' = \omega – 2b/\omega$

$2c = P'C'.Q'C' = (\omega – 2a/\omega).(\omega – 2b/\omega) = (1 – 2a/\omega^2).(1 – 2b/\omega^2).\, \omega^2$

Puis, substituant y à ω^2 :

$2c/y = (1 – 2a/y).(1 – 2b/y)$

(E) $y^2 – 2(a + b + c).y + 4a.b = 0$

$x^2 = [y – (a + b + c)]^2 = (a + b + c)^2 – 4a.b$

$x = [(a + b + c)^2 – 4a.b]^{1/2}$

La face sud ou le retour aux fondamentaux

Ayant résolu le problème *via* une quadrature, notre ami le Sioux se demande si cette dernière était vraiment nécessaire. N'aurait-il pu mener à bien son calcul de manière similaire, mais en attaquant de front la face sud, c'est-à-dire en se basant sur la figure initiale, sans en transformer préalablement les parallélogrammes constitutifs en des rectangles et un carré ? Or il lui apparaît rapidement que tel est effectivement le cas !

En effet, notant $\alpha = OA$, $\beta = OB$ les longueurs des côtés du parallélogramme OACB et $\theta = (OA, OB)$ l'angle qu'ils forment, on a successivement :

$2a = OA.OS.\sin\theta = \alpha.AP.\sin\theta \Rightarrow AP = 2a/\alpha.\sin\theta$

$2b = OB.OR.\sin\theta = \beta.BQ.\sin\theta \Rightarrow BQ = 2b/\beta.\sin\theta$

$2c = PC.QC.\sin\theta = (AC – AP)\ (BC – BQ).\ \sin\theta = (\beta – 2a/\alpha.\sin\theta).\ (\alpha – 2b/\beta.\sin\theta).\sin\theta$

$2c = (1 – 2a/\alpha.\beta.\sin\theta).(1 – 2b/\alpha.\beta.\sin\theta).\alpha.\beta.\sin\theta$

Puisque $\alpha.\beta.\sin\theta = y$, où y est l'aire du parallélogramme OACB, on retrouve l'équation canonique du second degré en y, soit :

$2c/y = (1 – 2a/y).(1 – 2b/y) \Leftrightarrow$ (E) $y^2 – 2(a + b + c).y + 4a.b = 0$

dont la résolution conduit sans encombre au résultat final. Filant la métaphore himalayenne… l'épaule (E) étant atteinte, la voie de la face sud y rejoint la piste du Sioux et le sommet est en vue.

Les degrés de (la) liberté

La confluence des itinéraires, avec ou sans quadrature, nous invite à contempler l'architecture du problème posé. La figure géométrique initialement portée à notre attention est en réalité une réalisation particulière d'un système à cinq *degrés de liberté*. En effet, pour tracer cette figure sur le papier (à une translation et à une rotation près), cinq informations sont nécessaires (et suffisantes) : par exemple, les longueurs α et β des côtés OA et OB du parallélogramme OACB, l'angle θ formé par ces deux côtés, ainsi que les ratios $r^* = OR/\alpha$ et $s^* = OS/\beta$ qui permettent de déterminer les positions des points P et Q sur les côtés AC et BC. D'autres paramétrages que celui-ci sont bien sûr possibles, mais aucun ne peut comporter moins de cinq paramètres.

Or l'énoncé du problème ne fournit que trois paramètres, à savoir les aires a, b et c des triangles OAP, OBQ et PCQ. Trois ôtés de cinq, manquent donc deux paramètres pour être en mesure de spécifier complètement la figure. Et c'est de ce manque cruel d'oxygène que naît le mal des montagnes de l'aventureux néophyte, dont les symptômes ont été décrits plus haut : « On ne m'a pas tout dit ! », se plaint-il. Et il a raison ! Certes, on ne lui a pas tout dit… mais on lui en a cependant dit assez pour lui permettre de répondre à la question qui lui a été posée, à savoir le calcul des aires x et y de OPQ et OABC. Au prix d'un certain effort, il y parviendra en effet *via* l'équation canonique, en empruntant l'arête des forts en géométrie (*cf.* supra).

Reste une interrogation légitime : où sont passés les deux paramètres manquants, les deux degrés de liberté résiduels de la figure ? La réponse réside dans l'égalité :

(EE) $\alpha.\beta.\sin\theta = a + b + c + [(a + b + c)^2 - 4a.b]^{1/2}$

dont les membres de gauche et de droite expriment de deux manières différentes l'aire y du parallélogramme OABC. L'existence de la relation (EE) n'a pas de quoi surprendre, puisqu'au sein d'un système à cinq degrés de liberté, les six paramètres (α, β, θ, a, b, c) ne peuvent être indépendants : ils sont nécessairement connectés par une relation, aussi certainement que six moins un font cinq ! Ceci n'est pas sans rappeler les « équations d'état » de la physique, exprimant des liaisons entre des grandeurs non indépendantes les unes des autres et descriptives d'un même système. Les aires a, b et c étant fixées par l'énoncé, l'équation d'état (EE) lie entre eux les trois autres paramètres (α, β, θ), qui constituent ainsi un sous-système à deux degrés de liberté… les fameux deux degrés résiduels !

En définitive, il existe une infinité (d'ordre deux) de formes géométriques distinctes mais « équivalentes », en ce sens qu'elles partagent toutes le même sous-système d'aires caractérisé par le triplet (a, b, c). Deux formes $\varphi = (\alpha, \beta, \theta)$ et $\varphi' = (\alpha', \beta', \theta')$ sont équivalentes si et seulement si :

$\alpha.\beta.\sin\theta = \alpha'.\beta'.\sin\theta' = y(a, b, c)$

Au sein de cette classe d'équivalence, on peut passer d'une forme φ à une autre φ' par compression-dilatation (si $\theta' = \theta'$ et $\alpha'.\beta' = \alpha.\beta$), ou encore par transvection (si $\alpha' = \alpha$ et $\beta'.\sin\theta' = \beta.\sin\theta$ ou si $\beta' = \beta$ et $\alpha'.\sin\theta' = \alpha.\sin\theta$), ou plus généralement par une combinaison quelconque de telles transformations élémentaires. Telle était bien l'intuition géniale du Sioux, qui lui a permis de tracer sa piste, en choisissant commodément le carré (ω, ω, $\pi/2$) pour figure de référence, telle que $\omega = \alpha' = \beta' = (\alpha.\beta)^{1/2}$.

*****

Voilà ! Nous avons, selon la formule consacrée, « fait le tour du problème », ainsi que certains font le tour du Mont Blanc. Nous sommes même montés au sommet, et ce sur plusieurs versants. Quelles leçons maintenant retenir de cette course haletante ? Rien, au fond, que nous ne sachions dès le départ et ne puissions traduire en quelques maximes :

Telle la montagne, que la mathématique est belle !

Patience et longueur de temps font plus que force ni que rage.

Là où il y a une volonté, il y a un chemin.

Un juriste a toujours besoin d'un plus scientifique que lui (et réciproquement).

Ne pas tout connaître ne peut servir d'excuse pour ne rien faire.

Dans l'étude d'un système, la liberté est encadrée et elle se mesure en degrés.

Un dernier commentaire en guise de mot de la fin : l'intelligence artificielle a sans doute encore devant elle d'importantes marges de progression, avant de savoir reproduire les mécanismes du raisonnement humain, aussi bien dans ses errances que dans ses fulgurances… le second de ces défis étant sans doute plus ardu que le premier !